

Problem Set 3: 谓词逻辑引论

(提交截止时间: 3 月 4 日 10:00)

Problem 1

令 $C(x)$ 为谓词 “ x 有一只猫作为宠物。”, $D(x)$ 为谓词 “ x 有一只狗作为宠物。”, $F(x)$ 为谓词 “ x 有一只雪貂作为宠物。”. 试用谓词 $C(x), D(x), F(x)$ 、量词和逻辑联结词表达以下各自然语言语句. 设论域为班上的全体有学生.

- (a) 班上的一个学生有一只猫、一只狗和一只雪貂作为宠物。
- (b) 班上的所有学生有一只猫或一只狗或一只雪貂作为宠物。
- (c) 班上的一些学生有一只猫和一只雪貂作为宠物, 但没有狗作为宠物。
- (d) 班上没有学生同时有一只猫、一只狗和一只雪貂作为宠物。
- (e) 对猫、狗和雪貂这三种动物的任意一种, 班上都有学生将其作为宠物。

Problem 2

如果每个变量的论域都为实数集 \mathbb{R} , 求下列各命题的真值.

- (a) $\exists x(x^2 = 2)$
- (b) $\exists x(x^2 = -1)$
- (c) $\forall x(x^2 + 2 \geq 1)$
- (d) $\forall x(x^2 \neq x)$

Problem 3

求下列命题的真值 (其中 $\exists!$ 表示量词: 存在且唯一的).

- (a) $\exists! x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$
- (b) $\forall x P(x) \rightarrow \exists! x P(x)$
- (c) $\exists! x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)$

Problem 4

“离散数学班上有 1 个数学专业的新生，12 个数学专业的二年级学生，15 个计算机专业二年级学生，2 个数学专业的三年级学生，2 个计算机专业的三年级学生和 1 个计算机专业的四年级学生。”试用自定义谓词和量词表达下列语句，并给出它们的真值.

- (a) 班上有一个三年级学生。
- (b) 班上每个学生都是计算机专业的。
- (c) 班上有个学生既不是数学专业的，也不是三年级学生。
- (d) 班上每个学生要么是二年级学生，要么是计算机专业的。
- (e) 存在这样一个专业使得该班级有这个专业每一个年级的学生。

Problem 5

自定义谓词，用谓词逻辑公式和相关数学运算符表达自然语言语句“有一个正整数不是三个整数的平方和。”

Problem 6

用谓词逻辑的自然推理系统证明：如果 $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge S(x)))$ 和 $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ 为真，那么 $\forall x(R(x) \wedge S(x))$ 为真.

Problem 7

用谓词逻辑的自然推理系统证明：如果 $\forall x(P(x) \vee Q(x))$, $\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$, $\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$ 和 $\exists x\neg P(x)$ 均为真，那么 $\exists x\neg R(x)$ 就为真.